Prof. Dr. C. W. Cryer SS 2006

Höhere Numerische Mathematik

Übungsblatt 1 , Abgabe: 13.4.2006 , 13.00 Uhr

Aufgabe 1: (6 Punkte)

$$\begin{aligned} R\,Q'(t) + \frac{Q(t)}{C} &= E_0\, sin(pt) \qquad (1)\\ Q(0) &= 0 \qquad (2) \end{aligned}$$

wo R, C, p und E_0 positive Konstanten sind, modelliert die Aufladung eines Kondensators mit Hilfe eines Wechselstroms. $Q(t)$ bezeichnet die Ladung des Kondensators zum Zeitpunkt t.
Bestimmen Sie $Q(t)$. (Zur Kontrolle: $Q(t)$ hat die Form

$$Q(t) = a\, sin(pt) \; + \; b\, cos(pt) \; + \; c\, e^{-\frac{t}{RC}} \qquad (3)$$

mit Konstanten a, b und c.)

Aufgabe 2: (4 Punkte)
$Q(t) \in C^1(t_0, \infty)$ erfülle die Differenzialgleichung (1) und die Anfangsbedingung

$$Q(t_0) = Q_0 \qquad (4)$$

wo Q_0 eine Konstante ist. Es sei $E_0 \neq 0$.
Zeigen Sie, daß es eine periodische Funktion $\phi(t)$ gibt, so daß

$$Q(t) \to \phi(t) \text{ für } t \to \infty \qquad (5)$$

Aufgabe 3: (3+3 Punkte)
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

$$y'(x) - \frac{y}{2x} = 5x^2y^5, \quad x > 0 \qquad (6)$$

indem Sie

1. Eine lineare inhomogene Differenzialgleichung für

   $$v(x) := (y(x))^{-4} \qquad (7)$$

   herleiten.

2. Diese Differenzialgleichung für v lösen.

Aufgabe 4: (4 Punkte)
$y(t) \in C^1(a,b)$ sei eine Lösung der Differenzialgleichung

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad (t,y) \in D \tag{8}$$

wobei

1. $$D := (a,b) \times R \tag{9}$$

2. $f \in C(D)$ ist beschränkt:

$$|f(t,u)| \leq M, \text{ für } (t,u) \in D \tag{10}$$

Zeigen Sie, daß der Limes

$$\lim_{t \to b} y(t) \tag{11}$$

existiert.
(N.B. Bedenken Sie, daß z.B. die Funktion

$$f(t,y) = sin(\frac{1}{b-t}) \tag{12}$$

die Voraussetzungen erfüllt).

Prof. Dr. C. W. Cryer SS 2006

Höhere Numerische Mathematik

Übungsblatt 2 , Abgabe: 20.4.2006 , 13.00 Uhr

Aufgabe 5: (4 Punkte)
Es sei das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y'(x) &= x^2 + y(x), \qquad x \geq 0 \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

gegeben. Verifizieren Sie, dass es von $y(x) = 3e^x - x^2 - 2x - 2$, $x \geq 0$ gelöst wird und bestimmen Sie mit Hilfe des *Eulerschen Polygonzugverfahrens (Verfahren von Euler)* mit der Schrittweite 0.2 einen Nährungswert für $y(1)$. Wie groß ist der prozentuale Fehler?

Aufgabe 6: (4 Punkte)
Berechnen Sie mit dem *klassischen Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung* Nährungswerte y_k, $k = 1, 2$ für die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = y^2 - x^2, \qquad y(0) = 1.$$

Wählen Sie die Schrittweite $h = 0.1$ und $x_0 = 0$ und runden Sie auf vier Stellen.

Aufgabe 7: (4 Punkte)
Bestimmen Sie alle *Runge-Kutta-Verfahren* der Gestalt

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \frac{1}{2} & a_{21} & & \\ \frac{2}{3} & a_{31} & a_{32} & \\ \hline & b_1 & b_2 & b_3 \end{array}$$

die die Ordnung 3 haben.

Aufgabe 8: (Programmieraufgabe, 8 Punkte)
Die Bahnkurve eines Satelliten, der sich im Gravitationsfeld von Erde und Mond bewegt, wird für den Fall, dass die drei Himmelskörper sich in einer Ebene bewegen, durch die Gleichungen

$$y_1'' = y_1 + 2y_2' - \mu' \frac{y_1 + \mu}{D_1} - \mu \frac{y_1 - \mu'}{D_2} \tag{1}$$

$$y_2'' = y_2 - 2y_1' - \mu' \frac{y_2}{D_1} - \mu \frac{y_2}{D_2} \tag{2}$$

mit

$$
\begin{aligned}
D_1 &= \left((y_1+\mu)^2 + y_2^2\right)^{3/2}, \\
D_2 &= \left((y_1-\mu')^2 + y_2^2\right)^{3/2}, \\
\mu &= 0.012277471, \\
\mu' &= 1-\mu
\end{aligned}
$$

beschrieben. Dabei ist (y_1, y_2) ein um den Ursprung rotierendes Koordinatensystem, in dem sich Mond und Erde an den festen Punkten $(1-\mu, 0)$ bzw. $(-\mu, 0)$ befinden. Für die Anfangswerte

$$
\begin{aligned}
y_1(0) &= 0.994, \\
y_1'(0) &= 0, \\
y_2(0) &= 0, \\
y_2'(0) &= -2.00158510637908252240537862224, \\
x_{\mathrm{end}} &= 17.0652165601579625588917206249
\end{aligned}
$$

ergibt sich ein geschlossener sogenannter Arenstorf-Orbit, eine periodische Lösung mit der Periode x_{end}. Man berechne den Orbit mit dem klassischen Runge-Kutta-Verfahren vierter Ordnung für Schrittweiten $h = x_{\mathrm{end}}/6000$ bzw. $h = x_{\mathrm{end}}/17000$ (6000 bzw. 17000 Schritte). Führen Sie die gleiche Rechnung mit dem Euler-Verfahren mit einer Schrittweite $h = x_{\mathrm{end}}/24000$ durch, plotten und vergleichen Sie die Ergebnisse!

Hinweis:
Überführen Sie (1) und (2) zunächst in ein System 1. Ordnung.

Die Programmieraufgabe darf eine Woche später abgegeben werden! Geben Sie dazu bitte einen Ausdruck des (Matlab-) Codes ab und senden Sie zudem das Programm per email an Ihren Übungsgruppenleiter.

Prof. Dr. C. W. Cryer SS 2006

Höhere Numerische Mathematik

Übungsblatt 3 , Abgabe: 27.4.2006 , 13.00 Uhr

Aufgabe 9: (4 Punkte)
Es sei

$$f(x,y) = g(x)$$

Zeigen Sie, dass das klassische Runge-Kutta Verfahren für $y'(x) = f(x,y)$ in diesem Fall mit einer bekannten Integrationsformel übereinstimmt.

Aufgabe 10: (4 Punkte)
Die skalare Gleichung

$$y' = \lambda y$$

werde duch das klassische Runge-Kutta Verfahren numerisch gelöst. Zeigen Sie, dass

$$y_1 = \left(\sum_{j=0}^{4} \frac{(h\lambda)^j}{j!} \right) y_0$$

gilt.

Aufgabe 11: (4 Punkte)
Bestimmen Sie alle Runge-Kutta-Verfahren der Gestalt

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \frac{1}{2} & a_{21} & & \\ \frac{2}{3} & a_{31} & a_{32} & \\ \hline & b_1 & b_2 & b_3 \end{array}$$

die die Ordnung 3 haben.

Aufgabe 12: (4 Punkte)
Ein s-stufiges Runge-Kutta Verfahren für die autonome Gleichung $y' = f(y)$ hat genau dann die Ordnung p, wenn

$$\sum_{j=1}^{s} b_j \Phi_j(t) = \frac{1}{\gamma(t)} \tag{1}$$

für alle Butcher-Bäume t der Ordnung $\leq p$ gilt.

a) Bestimmen Sie alle Butcher-Bäume der Ordnung ≤ 3.

b) Benutzen Sie (1), um die Gleichungen herzuleiten, die von den Koeffizienten a_{ij} und b_i erfüllt werden müssen, damit das Runge-Kutta Verfahren

$$\begin{array}{c|ccc} & 0 & & \\ & a_{21} & & \\ & a_{31} & a_{32} & \\ \hline & b_1 & b_2 & b_3 \end{array}$$

die Ordnung 3 hat.

Aufgabe 13: (4 Punkte)
Die skalare Gleichung $y'' = f(y)$ wird als System

$$\begin{aligned} y' &= z, \\ z' &= f(y) \end{aligned}$$

geschrieben und approximiert durch

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + h\left(z_k + \frac{1}{4}h(k_1 + k_2)\right), \\ z_{k+1} &= z_k + \frac{h}{4}(k_1 + 3k_2) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} k_1 &= f(y), \\ k_2 &= f\left(y + \frac{2}{3}hz + \frac{1}{3}h^2 k_1\right). \end{aligned}$$

Zeigen Sie, das der lokale Diskretisierungsfehler für y $\mathcal{O}(h^3)$ ist.

Aufgabe 14: (Bonusaufgabe 4 Punkte)
Sei a_q die Anzahl der gewurzelten Bäume der Ordnung q. Beweisen Sie die Gleichung

$$a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 + \cdots = (1-x)^{-a_1}(1-x^2)^{-a_2}(1-x^3)^{-a_3}\ldots$$

und bestimmen Sie die Koeffizienten a_q für $q = 1, \ldots, 5$.

Prof. Dr. C. W. Cryer SS 2006

Höhere Numerische Mathematik

Übungsblatt 4 , Abgabe: 4.5.2006 , 13.00 Uhr

Aufgabe 15: (2 Punkte)
Beweisen Sie die Identität

$$y_{k-q} = \sum_{\nu=0}^{q} (-1)^\nu \binom{q}{\nu} \triangledown^\nu \, y_k$$

aus Lemma 7.4.1 mit Hilfe der vollständigen Induktion.

Aufgabe 16: (4 Punkte)
Berechnen Sie für $\nu \leq 2$ die Koeffizienten γ_ν der Adams-Moulton Methode.

Aufgabe 17: (4 Punkte)
Sei E definiert durch

$$Ey_k = y_{k+1}$$

a) Zeigen Sie durch formale Rechnungen, dass

$$E = \frac{1}{1-\triangledown}$$

gilt.

b) Sei p ein Polynom vom Grade n. Zeigen Sie, dass

$$\triangledown^q p(x) = 0$$

für $q > n$ gilt.

c) Zeigen Sie, dass die Identität

$$p(x_k + sh) = E^s p(x_k) = (1 - \triangledown)^{-s} p(x_k)$$

aus Lemma 7.4.2 hergeleitet werden kann.

Aufgabe 18: (4 Punkte)
Die *Methode von Quade* ist definiert durch die Iterationsvorschrift

$$y_{n+4} - \frac{8}{19}(y_{n+3} - y_{n+1}) - y_n \;=\; \frac{6h}{19}(f_{n+4} + 4f_{n+3} + 4f_{n+1} + f_n)$$

Bestimmen Sie den führenden Term αh^r des lokalen Diskretisierungsfehlers

$$T_h(x_n) = \alpha h^r + \mathcal{O}(h^{r+1}).$$

Aufgabe 19: (Programmieraufgabe, 6 Punkte)
Benutzen Sie die Adams-Bashforth Methode

$$y_{n+2} - y_{n+1} = \frac{h}{2}(3f_{n+1} - f_n)$$

als Prädiktor und die Adams-Moulton Methode

$$y_{n+2} - y_{n+1} = \frac{h}{2}(f_{n+2} + f_{n+1})$$

als Korrektor, um das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u' &= v \\ v' &= \frac{v(v-1)}{u} \end{aligned}$$

mit den Anfangsdaten

$$\begin{aligned} u(0) &= 0.5 \\ v(0) &= -3 \end{aligned}$$

für $0 \leq t \leq 1$ zu lösen. Die exakte Lösung

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{8}\left(1 + 3e^{-8t}\right) \\ v(t) &= -3e^{-8t} \end{aligned}$$

des Problems ist bekannt. Setzen Sie für $k = 0, 1$ die Startwerte

$$\begin{aligned} \bar{u}_{k,h} &= u(kh), \\ \bar{v}_{k,h} &= v(kh). \end{aligned}$$

a) Berechnen Sie für $0 \leq t \leq 1$ die Lösung mit einer Folge von Schritten $h = 0.1, 0.05, 0.025, 0.0125, \ldots$. Iterieren Sie die Korrektor-Methode, bis die Fehler $|u_{k,h}^{t+1} - u_{k,h}^t| \leq 10^{-10}$, $|v_{k,h}^{t+1} - v_{k,h}^t| \leq 10^{-10}$ ist.

b) Bestimmen Sie die Anzahl der benötigten Iterationen.

c) Für $0 \leq k \leq \frac{1}{h}$ sei

$$E_{k,h} := \left\| \begin{pmatrix} u(kh) \\ v(kh) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_{k,h} \\ v_{k,h} \end{pmatrix} \right\|_2 .$$

Plotten Sie den Fehler $\ln(E_h(1))$ gegen $\ln(h)$, wobei $E_h(1) := E_{1/h,h}$ ist.

Hinweis:
Die Programmieraufgabe darf eine Woche später abgegeben werden! Geben Sie dazu bitte einen Ausdruck des (Matlab-) Codes ab und senden Sie zudem das Programm per email an Ihren Übungsgruppenleiter.

Prof. Dr. C. W. Cryer SS 2006

Höhere Numerische Mathematik

Übungsblatt 5 , Abgabe: 11.5.2006 , 13.00 Uhr

Aufgabe 20: (2+2+2 Punkte)
Für $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ wird die Gamma-Funktion $\Gamma(x)$ wie folgt defininiert:

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt.$$

Beweisen Sie:

a) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ für $x > 0$.

b) $\Gamma(n+1) = n!$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$.

c) $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Aufgabe 21: (2+4 Punkte)
Es seien

$$\begin{aligned} Ef(x) &:= f(x+h) \\ Df(x) &:= f'(x). \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie mit Hilfe der Taylor-Reihe

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \ldots,$$

dass die symbolische Gleichheit

$$E = e^{hD}$$

gilt.

b) Die Koeffizienten $\gamma_{\nu,r}$ für die Rückwärtsdifferentiationsformel seien wie im Skript S. 132 gegeben. Zeigen Sie mit Hilfe von a), dass für $\nu \geq 1$

$$\gamma_{\nu,r} = \sum_{k=0}^{\min(r,\nu-1)} \binom{r}{k} (-1)^k \frac{1}{\nu - k}$$

gilt.

Aufgabe 22: (2+2+4 Punkte)
Sei

$$Lu := u^{(n)} + \alpha_{n-1} u^{(n-1)} + \cdots + \alpha_1 \dot{u} + \alpha_0 u$$

mit $\alpha_k \in \mathbb{R}$, $n-1 \leq k \leq 0$. Sei

$$p(\lambda) := \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0.$$

a) Sei ρ eine k-fache reelle Nullstelle des Polynoms $p(\lambda)$. Zeigen Sie, dass die k Funktionen $e^{\rho t}$, $te^{\rho t}, \dots, t^{k-1}e^{\rho t}$ Lösungen der homogenen Differentialgleichung

$$Lu = 0$$

sind.

b) Sei $\rho + i\sigma$ mit $\sigma \neq 0$ (und damit auch $\rho - i\sigma$) eine m-fache komplexe Nullstelle des Polynoms $p(\lambda)$. Zeigen Sie, dass die $2m$ Funktionen

$$\begin{gathered} e^{\rho t}\cos(\sigma t), te^{\rho t}\cos(\sigma t), \dots, t^{m-1}e^{\rho t}\cos(\sigma t), \\ e^{\rho t}\sin(\sigma t), te^{\rho t}\sin(\sigma t), \dots, t^{m-1}e^{\rho t}\sin(\sigma t) \end{gathered}$$

Lösungen der homogenen Gleichung

$$Lu = 0$$

sind.

c) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} y''' + 6y' + 20y &= 0, \\ y(0) &= 3, \\ y'(0) &= 9, \\ y''(0) &= 6. \end{aligned}$$

Prof. Dr. C. W. Cryer SS 2006

Höhere Numerische Mathematik

Übungsblatt 6 , Abgabe: Freitag 18.5.2006 , 11.00 Uhr!

Aufgabe 23: (2+2+2+2 Punkte)
Es sei $\alpha_m = 1$ und das Polynom $p(\lambda)$ gegeben durch

$$p(\lambda) = \sum_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu \lambda^\nu .$$

Die $m \times m$ Matrix A sei definiert durch

$$A := \begin{pmatrix} 0 & . & . & . & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & . & . & 0 & -\alpha_1 \\ . & . & & & . & . \\ . & & . & & . & . \\ 0 & . & 0 & 1 & 0 & -\alpha_{m-2} \\ 0 & . & . & 0 & 1 & -\alpha_{m-1} \end{pmatrix}$$

$p(\lambda)$ habe die unterschiedlichen Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ der Vielfachheiten $r_1, \ldots, r_n$ mit

$$\sum_{j=1}^{n} r_j = m.$$

Zeigen Sie, dass das Jordan-Kästchen J_j zu λ_j von A die Dimension r_j hat, indem Sie folgendes beweisen und anwenden:

a) Es gilt

$$\begin{aligned} Ie_1 &= e_1 = A^0 e_1, \\ Ae_k &= e_{k+1} = A^k e_1, \qquad 1 \le k \le m-1 \\ Ae_m &= -\sum_{\nu=0}^{m-1} \alpha_\nu e_{\nu+1}, \end{aligned}$$

wobei $e_1, \ldots, e_m$ Basisvektoren sind.

b) Es gilt $p(A)e_k = 0$ für $1 \le k \le m$ und $p(A) = 0$.

c) Wäre $q(A) = 0$ mit

$$q(\lambda) = \lambda^s + \sum_{j=0}^{s-1} b_j \lambda^j$$

und $s < m$, dann gilt

$$e_{s+1} + \sum_{j=0}^{s-1} b_j e_{j+1} = 0.$$

d) Die Jordan Kästchen J_j haben die Dimension $r_j \times r_j$ und die Gestalt

$$J_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & & & 0 \\ & . & . & & \\ & & . & . & \\ & & & . & 1 \\ 0 & & & & \lambda_j \end{pmatrix}$$

Aufgabe 24: (2 Punkte)
$z(t)$ sei die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} z^{(m)}(t) + \sum_{\nu=0}^{m-1} \alpha_\nu z^{(\nu)}(t) &= 0, \\ z^{(\nu)}(0) &= z_\nu, \qquad 0 \le \nu < m, \end{aligned} \tag{1}$$

wobei die Anfangswerte z_ν bekannt seien und $z^{(\nu)}(t) = \frac{d^\nu}{dt^\nu} z(t)$ bezeichne. Zeigen Sie, dass Vektoren $Z(t)$, Z_0 und eine Matrix A definiert werden können, so dass die Anfangswertaufgabe (1) wie folgt geschrieben werden kann:

$$\begin{aligned} Z'(t) &= AZ(t), \\ Z(0) &= Z_0. \end{aligned}$$

Aufgabe 25: (2 Punkte)
Beweisen Sie die für den Beweis von Satz 7.5.4 nötige Ungleichung

$$\frac{1+x}{1-x} \le 1 + 4x, \qquad 0 \le x \le \frac{1}{2}.$$

Aufgabe 26: (2+2+4 Punkte)
Sei

$$z_{k+n} + \alpha_{n-1} z_{k+n-1} + \cdots + \alpha_0 z_k = 0, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{2}$$

mit $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $0 \le j \le n-1$ und weiterhin

$$p(\lambda) := \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0.$$

a) Sei λ_j eine reelle Nullstelle der Vielfachheit r_j des Polynoms $p(\lambda)$. Zeigen Sie, dass

$$z_k = \lambda_j^k k(k-1) \cdots (k-s+1)$$

für $s = 0, 1, \ldots, r_j - 1$ eine Lösung von (2) ist, indem Sie das Polynom $\lambda^k p(\lambda)$ s-mal nach λ differenzieren.

b) Sei $\lambda_j = x_j + iy_j = |\lambda_j| e^{i\theta_j}$ mit $y_j \ne 0$ (und damit auch $\bar{\lambda}_j = x_j - iy_j$) eine echt komplexe Nullstelle der Vielfachheit r_j des Polynoms $p(\lambda)$. Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} z_k &= |\lambda_j|^k k(k-1) \cdots (k-s+1) \cos(k\theta_j), \\ z_k &= |\lambda_j|^k k(k-1) \cdots (k-s+1) \sin(k\theta_j), \end{aligned}$$

für $0 \le s < r_j$ Lösungen der Gleichung (2) sind.

c) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} z_{k+3} - 5z_{k+2} + 10z_{k+1} - 12z_k &= 0, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \\ z_0 &= 2, \\ z_1 &= 4, \\ z_2 &= 7. \end{aligned}$$

Prof. Dr. C. W. Cryer SS 2006

Höhere Numerische Mathematik

Übungsblatt 7 , Abgabe: Freitag 26.5.2006 , 11.00 Uhr!

Aufgabe 27: (6 Punkte)
Beweisen Sie den folgenden Satz:
Satz: *$y \in C^1(a,b)$ sei eine Lösung der AWA*

$$\begin{aligned} y'(x) &= f(x, y(x)), \qquad a \le x \le b, \\ y(a) &= y_0. \end{aligned} \tag{1}$$

$\epsilon > 0$ sei eine Konstante und $D := \{(x,z) : a \le x \le b,\ y(x) - \epsilon \le z \le y(x) + \epsilon\}$. Es gelte $f \in C(D)$ und f erfülle eine Lipschitz Bedingung in D. Die AWA (1) werde durch ein konsistentes stabiles LMV approximiert. Dann gibt es eine Konstante $h_0 > 0$, so dass

$$(x_k, y_k) \in D, \qquad a \le x_k \le b,$$

für $h < h_0$.

Hinweis: Betrachten Sie die Hilfs-AWA

$$\begin{aligned} Y'(x) &= F(x, Y(x)), \qquad a \le x \le b, \\ Y(a) &= y_0 \end{aligned} \tag{2}$$

mit

$$F(x,Y) := \begin{cases} f(x, y(x) - \epsilon) & \text{für} \quad Y \le y(x) - \epsilon, \\ f(x, Y) & \text{für} \quad y(x) - \epsilon \le Y \le y(x) + \epsilon, \\ f(x, y(x) + \epsilon) & \text{für} \quad Y \ge y(x) + \epsilon. \end{cases}$$

Aufgabe 28: (2+1+1 Punkte)
Die AWA

$$\begin{aligned} y'(x) &= \mu y(x), \qquad x \ge 0,\ \mu \in \mathbb{R} \\ y(0) &= 1 \end{aligned} \tag{3}$$

werde durch die Methode

$$y_{k+2} - y_k = 2h f_{k+1} \tag{4}$$

gelöst.

a) Zeigen Sie, dass die Lösung y_k von (4) die Form

$$y_k = A(\lambda_1(h))^k + B(\lambda_2(h))^k$$

hat, wobei

$$\begin{aligned} \lambda_1(h) &= e^{\mu h} + \mathcal{O}(h^3) \\ \lambda_2(h) &= -e^{-\mu h} + \mathcal{O}(h^3) \end{aligned}$$

gilt.

b) Welches $\lambda_r(h)$ entspricht der Lösung von (3) und welches ist parasitisch?

c) Wie verhält sich die Approximation y_k, falls μ eine große negative Zahl ist?

Aufgabe 29: (2+2+2 Punkte)

a) Zeigen Sie:

$$\frac{d^k}{dz^k}\chi(z)\Big|_{z=0} = \frac{d^k}{d\lambda^k}\varphi(\lambda)\Big|_{\lambda=1} \tag{5}$$

b) Berechnen Sie die Konstanten $C_0, \ldots, C_{p+1}$ für das LMV (ρ, σ) mit

$$\begin{aligned} \rho(z) &= z^2 - 1, \\ \sigma(z) &= 2z. \end{aligned}$$

c) Die AWA

$$\begin{aligned} y'(x) &= y(x), \qquad x \geq 0, \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

hat die Lösung $y(x) = e^x$. Zeigen Sie für dieses Problem, dass

$$T_h(x_{k+m}) = \left[\frac{\rho(e^h)}{h} - \sigma(e^h)\right] e^{x_k}$$

gilt.

Die Notationen in dieser Aufgabe entsprechen denen aus Satz 7.6.1.

Aufgabe 30: (4 Punkte)
Bestimmen Sie α, β in dem Mehrschrittverfahren

$$y_{k+3} - y_k + \alpha(y_{k+2} - y_{k+1}) = h\beta(f_{k+2} + f_{k+1})$$

so, dass die Konsistenzordnung 4 erreicht wird. Ist das entsprechende Verfahren stabil?

Prof. Dr. C. W. Cryer SS 2006

Höhere Numerische Mathematik

Übungsblatt 8 , Abgabe: 1.6.2006 , 13.00 Uhr

Aufgabe 31: (2 Punkte)
Zeigen Sie, dass die Methode

$$y_{k+3} + \frac{27}{11} y_{k+2} - \frac{27}{11} y_{k+1} - y_k = h f_{k+3}$$

instabil ist, indem Sie das Polynom

$$r(w) = \Big(\frac{1-w}{2}\Big)^3 \rho\Big(\frac{1+w}{1-w}\Big)$$

mit Hilfe des Routh-Hurwitz Satzes untersuchen.

Aufgabe 32: (1+1+2+4 Punkte)
Sei (ρ, σ) ein stabiles m-Schritt LMV der Ordnung p. Zeigen Sie (mit den Notationen aus Satz 7.6.2):

a) $s(1) = \beta_m$ und $r(1) = \alpha_m$

b) $c_0 = \frac{1}{2}$

c) $\sum_{\nu=1}^{\infty} c_{2\nu} = -\frac{1}{2}$

d) $p \leq m$, falls $\frac{\beta_m}{\alpha_m} \leq 0$

Aufgabe 33: (Programmieraufgabe, 10 Punkte)
Das *Hodgkin-Huxley-Modell* ist das berühmteste Modell zur Simulation von Nervenzellen (Neuronen). Es wurde 1952 von Alan Lloyd Hodgkin und Andrew Fielding Huxley, ursprünglich zur Beschreibung der Entstehung von Aktionspotenzialen V (kurzzeitigen, in ganz charakteristischen Formen ablaufende Abweichungen des Membranpotenzials einer Zelle von ihrem Ruhemembranpotenzial) in den Nervenzellen des Tintenfisches, entwickelt. Das Modell wird durch die Differentialgleichung

$$\frac{d^2V}{dt^2} = K\left[\frac{dV}{dt} + \frac{1}{C_M}\{\bar{g}_K n^4(V - V_K) + \bar{g}_{Na} m^3 h (V - V_{Na}) + \bar{g}_l (V - V_l)\}\right] \tag{1}$$

beschrieben. $\bar{g}_K$ und $\bar{g}_{Na}$ sind die maximalen Leitfähigkeiten des Kalium- und Natriumkanals, V_K und V_{Na} sind ihre festen Potenziale. G_l und V_l sind die Leitfähigkeit und das Ruhepotential der Membran. Die dimensionslosen Koeffizienten n, m und h werden durch die Differentialgleichungen

$$\frac{dn}{dt} = \alpha_n(V)(1-n) - \beta_n(V)n, \tag{2}$$

$$\frac{dm}{dt} = \alpha_m(V)(1-m) - \beta_m(V)m, \tag{3}$$

$$\frac{dh}{dt} = \alpha_h(V)(1-h) - \beta_h(V)h \tag{4}$$

beschrieben. Dabei wurden die α_i und β_i von Hodgkin und Huxley durch ihre Experimente als Näherung bestimmt. Sie lauten

$$
\begin{aligned}
\alpha_n(V) &= 0.01 \cdot \frac{V+10}{e^{\frac{V+10}{10}}-1}, \\
\beta_n(V) &= 0.125 \cdot e^{\frac{V}{80}}, \\
\alpha_m(V) &= 0.1 \cdot \frac{V+25}{e^{\frac{V+25}{10}}-1}, \\
\beta_m(V) &= 4 \cdot e^{\frac{V}{18}}, \\
\alpha_h(V) &= 0.07 \cdot e^{\frac{V}{20}}, \\
\beta_h(V) &= \frac{1}{e^{\frac{V+30}{10}}+1},
\end{aligned}
$$

die Konstanten in der Differentialgleichung (1) sind durch $C_M = 1$, $V_{Na} = -115$, $V_K = 12$, $V_l = -10.613$, $\bar{g}_{Na} = 120$, $\bar{g}_K = 36$ und $\bar{g}_l = 0.3$ gegeben.

Lösen Sie die Gleichungen (1) - (4) numerisch mit einem Verfahren Ihrer Wahl. Als Startwert seien $V_0 = 0.1$ und

$$
\begin{aligned}
n_0 &= \frac{\alpha_n(0)}{\alpha_n(0)+\beta_n(0)} \\
m_0 &= \frac{\alpha_m(0)}{\alpha_m(0)+\beta_m(0)} \\
h_0 &= \frac{\alpha_h(0)}{\alpha_h(0)+\beta_h(0)}
\end{aligned}
$$

Die Konstante K muss experimentell bestimmt werden, so dass die Lösung $V(t)$ für $t \to \infty$ beschränkt bleibt.

Die Programmieraufgabe darf eine Woche später abgegeben werden!

Prof. Dr. C. W. Cryer SS 2006

Höhere Numerische Mathematik

Übungsblatt 9 , Abgabe: Freitag 16.6.2006 , 11.00 Uhr!

Aufgabe 34: (5 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (u, v)$ die Abbildung , welche durch

$$\begin{aligned} u &= e^x \cos y \\ v &= e^x \sin y \end{aligned}$$

gegeben ist.

a) Bestimmen Sie das Bild von f.

b) Zeigen Sie, dass die Determinante der Jacobi-Matrix von f in jedem Punkt aus $\mathbb{R}^2$ von 0 verschieden ist.

c) Zeigen Sie, dass jeder Punkt aus $\mathbb{R}^2$ eine Umgebung hat, in der f injektiv ist, f ist jedoch nicht injektiv auf ganz $\mathbb{R}^2$ ist.

d) Wie sind die Bilder der Geraden $x = \alpha$ und $y = \beta$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ unter f?

Aufgabe 35: (5 Punkte)
Zeigen Sie, dass die Funktion

$$u = y\,\chi\left(\frac{x}{y}\right)$$

die Gleichung

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = u$$

löst. Dabei sei χ eine beliebige differenzierbare Funktion.

Aufgabe 36: (5 Punkte)

a) Eine Funktion $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ heißt *homogen von Grade* α, wenn

$$u(tx) = t^\alpha u(x), \qquad \forall\ x \in \mathbb{R}^n,\ \ x \neq 0,\ \ t \in \mathbb{R}^+$$

gilt. Zeigen Sie: $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ ist genau dann homogen vom Grade α, wenn

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = \alpha u$$

b) Lösen Sie die Anfangswertaufgabe

$$x_1\frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial u}{\partial x_2} = 0 \qquad \text{in } \mathbb{R}^2 \setminus \{0\},$$

$u = f(x)$ auf dem Kreis um den Ursprung vom Radius 1. Setzen Sie hinreichende Regularität von u und f voraus.

Aufgabe 37: (5 Punkte)
Zeigen Sie, dass die Lösung der nicht linearen Gleichung

$$u_x + u_y = u^2$$

mit den Anfangsdaten

$$\begin{aligned} x &= s \\ y &= -s \\ u &= s \end{aligned}$$

entlang der Hyperbel

$$x^2 - y^2 = 4$$

unendlich wird.

Prof. Dr. C. W. Cryer SS 2006

Höhere Numerische Mathematik

Übungsblatt 10 , Abgabe: 22.6.2006 , 13.00 Uhr

Aufgabe 38: (10 Punkte)
Gegeben sei die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) \tag{1}$$

für $0 \leq x \leq \pi$, $t \geq 0$ mit den Rand- und Anfangsdaten

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \varphi(x) && \text{für } 0 \leq x \leq \pi, && (2)\\ u(0,t) &= 0 && \text{für } t > 0, && (3)\\ u(\pi,t) &= 0 && \text{für } t > 0. && (4) \end{aligned}$$

Dabei ist die Funktion φ durch

$$\varphi(x) = \begin{cases} x & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ \pi - x & \text{für } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{cases} \tag{5}$$

gegeben. Zeigen Sie, dass die Fourier-Reihe

$$u(x,t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m e^{imx-m^2t}$$

mit den Koeffizienten

$$A_m := \begin{cases} 0 & \text{für } m \text{ gerade,} \\ \frac{2\mathrm{i}}{\pi m^2}(-1)^{(m+1)/2} & \text{für } m \text{ ungerade} \end{cases}$$

die Gleichung (1) mit den angegebenen Rand- und Anfangsdaten (2) – (5) löst.

Aufgabe 39: (Programmieraufgabe, 10 Punkte)
Gegeben sei wiederum die Wärmeleitungsgleichung (1) für $0 \leq x \leq \pi$, $t \geq 0$ mit den Rand- und Anfangsdaten (2) – (5). Die Schrittweite Δx wird durch

$$\Delta x = \frac{\pi}{J}$$

für $J \in \mathbb{N}$ definiert, so dass ein Gitter $x_j = j\Delta x$ für $j = 0, 1, \ldots, J$ entsteht. Für eine gegebene Zeitschrittweite Δt sei $t_n = n\Delta t$ mit $n = 0, 1, \ldots$. Die Approximation von $u(x_j, t_n)$ wird dann mit u_j^n bezeichnet.
Berechnen Sie für $J = 20$ eine approximierte Lösung u_j^n der Wärmeleitungsgleichung mit dem *expliziten Verfahren*

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} \tag{6}$$

für $j = 1, 2, \ldots, J-1$, $n = 0, 1, \ldots$, wobei die diskreten Randbedingungen

$$\begin{aligned} u_0^n &= 0, \\ u_J^n &= 0, \qquad\qquad n = 0, 1, \ldots \end{aligned}$$

lauten und die Anfangsbedingung durch

$$u_j^0 = \varphi(x_j), \qquad\qquad j = 0, 1, \ldots, J$$

mit φ aus Gleichung (5) gegeben ist. Berechnen Sie die Lösung u_j^n für die Parameterwahl $\Delta t = \frac{5}{9}\Delta x^2$ und $\Delta t = \frac{5}{11}\Delta x^2$. Plotten Sie die Ergebnisse jeweils für $t = 0$, $t = 5\Delta x^2$, $t = 10\Delta x^2$, $t = 15\Delta x^2$ und begründen Sie Ihre Ergebnisse!

Hinweis: Die Programmieraufgabe darf eine Woche später per E-mail an den Übungsgruppenleiter abgegeben werden.

Probeklausur

Prof. Dr. C. W. Cryer SS 2006

Höhere Numerische Mathematik

Aufgabe 1:
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $y = y(x)$ der Differentialgleichung

$$y' + 2xy = 2ax^3y^3, \quad x > 0,\ a \in \mathbb{R},$$

indem Sie eine lineare inhomogene Differentialgleichung für

$$v(x) := \frac{1}{y(x)^2}$$

herleiten und diese Differenzialgleichung für v lösen.

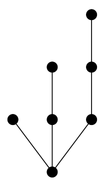
Hinweise:

1. Nehmen Sie an, dass die Konstanten so gewählt sind, dass die Lösung wohldefiniert ist.
2. Denken Sie an partielle Integration.

Aufgabe 2:
Jede Butcher Formel hat die Gestalt

$$\sum_{j=1}^{s} b_j \Phi_j(t) = \frac{1}{\gamma(t)}. \tag{1}$$

a) Bestimmen Sie die Formel (1) für den Baum

$t =$ 

b) Wie viele Butcher-Bäume der Ordnung ≤ 4 gibt es? Listen Sie diese Formeln auf.

Aufgabe 3:
Sei

$$z_{k+n} + \alpha_{n-1} z_{k+n-1} + \cdots + \alpha_0 z_k = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{2}$$

mit $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $0 \leq j \leq n-1$.

a) Sei λ eine echt komplexe Nullstelle der Vielfachheit 2 des Polynoms

$$p(\lambda) := \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_1\lambda + \alpha_0.$$

Zeigen Sie, dass es Polynome q_r, $r = 0,\, 1$ der Ordnung r gibt, so dass

$$z_k = |\lambda^k| q_r(k) \cos(k\theta), \quad r = 0,\, 1$$

eine Lösung von (2) ist, wobei θ konstant ist.

b) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$z_{k+4} - 6z_{k+3} + 10z_{k+2} - 6z_{k+1} + 9z_k = 0$$

mit

$$\begin{aligned} z_0 &= 6, \\ z_1 &= 21, \\ z_2 &= 104, \\ z_3 &= 459. \end{aligned}$$

Aufgabe 4:
Sei (ρ, σ) ein lineares Mehrschrittverfahren (LMV).

a) Wie ist der Begriff der *Konsistenz* eines LMVs definiert?

b) Geben Sie die Bedingungen an die Koeffizienten C_j, $j = 0, \ldots, p$ aus der Taylor-Entwicklung des lokalen Diskretisierungsfehlers $T_h(x_{k+m})$ des LMVs (ρ, σ) an, damit (ρ, σ) die Ordnung p hat.

c) Zeigen Sie, dass $\rho(1) = 0$ gilt, falls das Verfahren (ρ, σ) konsistent ist.

d) Bestimmen Sie die Ordnung der Methode

$$y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n = \frac{h}{2}(f_{n+2} - f_n)$$

und prüfen Sie nach, ob die Methode stabil ist.

Aufgabe 5:
Für $y'(x) = f(x, y)$ werde das LMV

$$y_{n+2} + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n = h\left[b_0 f(x_n, y_n) + b_1 f(x_{n+1}, y_{n+1})\right]$$

betrachtet.

a) Bestimmen Sie a_0, b_0, b_1 in Abhängigkeit von a_1 so, dass man ein Verfahren von mindestens 2. Ordnung erhält.

b) Für welche a_1-Werte ist das gewonnene Verfahren stabil?

c) Lässt sich a_1 so wählen, dass man ein stabiles Verfahren 3. Ordnung bekommt?

Aufgabe 6:

a) Gegeben sei die gewöhnliche Differentialgleichung

$$y^{(4)}(x) = x^2 y''(x) + xy'(x) - 3y(x) + 3$$

mit den Anfangswerten $y'''(1) = y'(1) = 2$, $y''(1) = y(1) = -1$. Transformieren Sie die Differentialgleichung auf ein System erster Ordnung. Geben Sie auch die transformierten Anfangswerte an.

b) Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$z'(x) = \begin{pmatrix} (z_2(x))^3 \\ x^2 z_1(x) + 3z_2(x) \end{pmatrix}, \quad z(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

mit $z(x) = (z_1(x), z_2(x))^T$. Berechnen Sie mit dem expliziten Euler-Verfahren und der Schrittweite $h = 0.5$ eine Approximation von $z(2)$.

Aufgabe 7:
Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$xuu_x + y^2 u_y = u^2, \quad x, y > 0$$

mit den Anfangsdaten $u = s$ für $x = 1/s$, $y = 2s$.

Aufgabe 8:

a) Wie ist der Begriff der *Stabilität* eines Verfahrens zur numerischen Lösung der Wärmeleitungsgleichung definiert?

b) Sei l_h^2 der Raum der Gitterfunktionen $v = \{v_m\}$ mit $||v||_h := \sqrt{h \sum_m |v_m|^2} < \infty$. Für das Intervall $I_h = [-\pi/h, \pi/h]$ bezeichne $L_2(I_h)$ den Raum der kontinuierlichen Funktionen v, die auf I_h eine beschränkte L_2-Norm haben, d.h. $||v||_2 = \sqrt{\int_{-\pi/h}^{\pi/h} |v(x)|^2 dx} < \infty$.

Dann wird durch

$$(\mathcal{F}_h v)(\xi) = \hat{v}(\xi) := \frac{h}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-imh\xi} v_m$$

eine Abbildung von l_h^2 nach $L_2(I_h)$ beschrieben. Sei

$$(\mathcal{F}_h v)(\xi) = 2h \cos(h\xi).$$

Wie lautet dann die Inverse $\left(\mathcal{F}_h^{-1} \hat{v}\right)_m$?

Aufgabe 9:
Untersuchen Sie die Stabilität der Methode

$$\frac{1}{\Delta t}\left(u_{k,l+1} - u_{k,l}\right) = \frac{1}{h^2}\left(u_{k-1,l+1} - 2u_{k,l+1} + u_{k+1,l+1}\right),$$

welche die Gleichung $\partial u/\partial t = \partial^2 u/\partial x^2$ im Punkt $(x_k, t_l) = (kh, l\Delta t)$, $k \in \mathbb{Z}$, $l \in \mathbb{N}$ approximiert.

Aufgabe 10:
Die Randwertaufgabe

$$\begin{aligned}
u_{xx} + u_{yy} + cu_x &= 0, && 0 \leq x, y \leq 1,\\
u(x,0) &= \cos(2\pi x), && 0 \leq x \leq 1,\\
u_x(0,y) &= 0, && 0 \leq y \leq 1,\\
u(x,1) &= x^2 - 1, && 0 \leq x \leq 1,\\
u(1,y) &= 1 - y, && 0 \leq y \leq 1
\end{aligned}$$

soll auf einem Gitter (x_i, y_j) mit $x_i = ih$, $y_j = jh$, $h = 1/N$ numerisch approximiert werden. Stellen Sie die Differenzengleichungen auf.